Список вопросов, выносимых на зачёт (2017 год)

1. Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество и его свойства.
2. Свойства внешней меры. Измеримость открытого множества и счётного объединения открытых множеств. Измеримость замкнутого множества, дополнения измеримого множества, разности и счётного пересечения измеримых множеств.
3. Свойство счётной аддитивности (σ-аддитивности) меры. Множества типа G_δ и F_δ. Пример неизмеримого множества.
4. Измеримые функции и их свойства. Измеримость верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций.
5. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.
6. Теорема Рисса. Эквивалентность функций, являющихся пределами по мере одной последовательности измеримых функций.
7. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функции на множестве конечной меры.
8. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.
9. Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Маорантный признак интегрируемости.
10. Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
11. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Леви и её следствие для рядов. Теорема Лебега — критерий интегрируемости.
12. Теорема Фубини. Интеграл Лебега для множества бесконечной меры.
13. Классы $L_p, p > 1$. Неравенства Гёльдера и Минковского.
14. Полнота пространства L_p.
15. Плотность множества непрерывных функций в L_p. Непрерывность в метрике L_p.
16. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.
17. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэра о категориях.
18. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.
19. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов.
20. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и следствие из неё. Пример из теории рядов Фурье на применение теоремы Банаха-Штейнгауза.
21. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора.
22. Теорема Банаха об обратном операторе.
23. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в линейном нормированном пространстве.
24. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах.
25. Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости.
26. Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой.
27. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

28. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

29. Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость её к нулю.

30. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств.

31. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.

32. Сопряжённый оператор. Теорема о сопряжённом операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряжённого.

33. Вполне непрерывный оператор. Пример интегрального вполне непрерывного оператора. Свойства вполне непрерывного оператора.

34. Первая теорема Фредгольма.

35. Вторая теорема (альтернатива) Фредгольма.

36. Третья теорема Фредгольма.

37. Понятие о спектре линейного оператора в бесконечномерных пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта.